

研究の概要

Navier-Stokes 方程式の強解の存在のための初期値に関する斉次 Besov 空間による特徴づけ

Navier-Stokes 方程式の古典解あるいは強解としてよく知られている Serrin クラスを, 空間方向に斉次 Besov 空間 $\dot{B}_{r,1}^0$, 時間方向に Lorentz 空間 $L^{\alpha,q}$ を採用して $L^{\alpha,q}(0, \infty; \dot{B}_{r,1}^0)$, $2/\alpha + n/r = 1$, $n < r < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ なる関数空間を導入した. まず, 初期値 a に対してする線形 Stokes 流 $e^{t\Delta}a$ が上記の関数空間に属するための必要十分条件は, $a \in \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{n}{p}}$, $n < p \leq r$ であることを証明した. 次に非線形の Navier-Stokes 方程式に関しては, a がこの斉次 Besov 空間で小さければ, $u \in L^{\alpha,q}(0, \infty; \dot{B}_{r,1}^0)$ なる解 u が一意的に存在することを示した. 逆に, $u \in L^{\alpha,q}(0, \infty; L^r)$ であれば, $a \in \dot{B}_{r,q}^{-1+\frac{n}{r}}$ でなければならないことを示した. これらはすべて Navier-Stokes 方程式に関するスケール不変な関数空間となっている. 特に, 初期値が属する斉次 Besov 空間の 3 番目の指数 q (数列級数の空間 l^q に相当) は, 解の時間方向の Lorentz 空間の第 2 指数に反映されることが明らかにされた. 更に, このような強解 $u(x, t)$ は, $x \in \mathbb{R}^n$ に関して解析的であり, その収束半径は x に関して一様に \sqrt{t} に比例して取れることを証明した. 証明の手法は, 解の空間方向の高階の偏導関数 $\partial^\beta u(\cdot; t)$ を L^r 値の関数として $t \in (0, \infty)$ に関する Hölder 評価式を導出することに依る.

2次元外部領域における L^r -調和ベクトル場の特徴づけ

2次元平面内の滑らかな閉曲線 $\partial\Omega$ を境界にもつ外部領域 Ω における L^r -調和ベクトル場 h に対して $h \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$ 及び $h \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0$ の 2 種類の境界条件を考える. いずれの境界条件の場合も, L^r -調和ベクトル場は有限次元の線形空間であることを証明した. 特に, 境界が L 個の連結成分からなる単一閉曲線であるとき, $1 < r \leq 2$ のときは, $L-1$ 次元線形空間であり, $2 < L < \infty$ のときは, L 次元線形空間であることを示した.

学術論文および著書

1. Kozono, H., Okada, A., Shimizu, S., Characterization of initial data in the homogeneous Besov space for solutions in the Serrin class of the Navier-Stokes equations J. Funct. Anal. **278** (2020), 108390. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.108390>
2. Hieber M., Kozono, H., Seyfert, A., Shimizu, S., Yanagaisawa, T., A Characterization of Harmonic L^r -Vector Fields in Two-Dimensional Exterior Domains. J. Geom. Anal. **30** (2020), 3742–3759. <https://doi.org/10.1007/s12220-019-00216-0>

口頭発表・講演

1. International Workshop on Multiphase Flows: Analysis, Modelling and Numerics 1-4 December 2020, Waseda University, Tokyo, Japan 2020 年 12 月 3 日
講演題目: **Asymptotic properties of steady solutions to the 2D Navier-Stokes equations with the finite generalized Dirichlet integral.**
We consider the stationary Navier-Stokes equations in the whole plane \mathbb{R}^2 and in the exterior domain outside of the large circle. The solution v is handled in the class with

$\nabla v \in L^q$ for $q \geq 2$. Since we deal with the case $q \geq 2$, our class may be larger than that of the finite Dirichlet integrals, i.e., for $q = 2$ where a number of results such as asymptotic behavior of solutions have been observed. For the stationary problem we shall show that $\omega(x) = o(|x|^{-(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2})})$ as $|x| \rightarrow \infty$, where $\omega \equiv \text{rot } v$. As an application, we prove the Liouville type theorems under the assumption that $\omega \in L^q(\mathbb{R}^2)$ for $q > 2$. This talk is based on the joint work with Yutaka Terasawa(Nagoya Univ.) and Yuta Wakasugi(Hiroshima Univ.)

2. 北京大学 数学科学学院 連続講義 2020 年 12 月 4 日, 11 日, 18 日, 25 日,
講義題目 : **Strong solutions of the Navier-Stokes equations based on the maximal Lorentz regularity theorem in Besov spaces (I), (II), (III), (IV), (V).**

We show existence and uniqueness theorem of local strong solutions to the Navier-Stokes equations with arbitrary initial data and external forces in the homogeneous Besov space with both negative and positive differential orders which is an invariant space under the change of scaling. If the initial data and external forces are small, then the local solutions can be extended globally in time. Our solutions also belong to the Serrin class in the usual Lebesgue space. The method is based on the maximal Lorentz regularity theorem of the Stokes equations in the homogeneous Besov spaces. As an application, we may handle such singular data as the Dirac measure and the single layer potential supported on the sphere. This is the joint work with Prof. Senjo Shimizu at Kyoto University.

<https://www.math.pku.edu.cn/kxyj/xsbg/tlb/geometricanalysis/124620.htm>

3. Fudan International Seminar on Analysis, PDEs, and Fluid Mechanics 2021 年 3 月 11 日
講演題目 : **L^r -Helmholtz-Weyl decomposition in two dimensional exterior domains.**

In 2D exterior domains, we consider two spaces of $L-r$ -harmonic vector fields which are parallel or perpendicular to the boundary. We first show that these spaces are of finite dimensions for all $1 < r < \infty$. In particular, if the domain has L -connected components of the boundary, then the dimension is characterized by L with its threshold $r = 2$. We next show that every L^r -vector fields is decomposed by the sum of harmonic vector fields, rotation and gradient of scalar functions for all $1 < r < \infty$. However, uniqueness of such a decomposition holds only for $1 < r \leq 2$. This talk is based on the joint work with Matthias Hieber, Anton Seyfert(TU Darmstadt), Senjo Shimizu(Kyoto Univ.) and Taku Yanagisawa(Nara Women Univ.).

外部資金獲得状況

- (i) 科学研究費補助金 基盤研究 (S)
研究課題番号 16H06339
研究課題名 「非線形解析学と計算流体力学の協働による乱流の数学的理論の新展開」
役割 研究代表
研究期間と研究経費 平成 28 年度—令和 3 年度 125,100 千円 (2020 年度は 27,600 千円 (直接経費)8,780 千円 (間接経費))
- (ii)] 科学研究費補助金 国際共同研究加速基金 (国際共同研究強化 (B))
研究課題番号 18KK0072

研究課題名「流体力学の近代数学解析」

役割 研究分担（代表 清水扇丈）

研究期間と研究経費 平成 30 年度-令和 4 年度 2,000 千円 (2020 年度は 700 千円 (直接経費)210 千円 (間接経費))

学会その他学内・外における活動

Journal of Mathematical Fluid Mecahnics, Editorial Board

Funkcialaj Ekvacioj, Editorial Board

Journal of Evolution Equation, Editorial Board

一般社団法人日本数学会・理事 理事長代行

公益財団法人数学オリンピック財団・理事

日本学術会議・連携会員

令和 2 年度文部科学大臣表彰科学技術賞審査部会委員

公益財団法人井上科学振興財団・表彰選考委員

京都大学数理解析研究所専門委員会委員