小薗英雄

研究の概要

時間方向に Lorentz 空間を採用した最大正則性定理による Navier-Stoes 方程式の強解

最大正則性定理において，基礎となる Banach 空間として斉次 Besov 空間 $\dot{B}^s_{p,\gamma}$ と取り，時間区間 $(0,T)$ における可積分空間としては Lorentz 空間 $L^{\alpha,q}(0,T)$ を採用した．すなわち，$L^{\alpha,q}(0,T;\dot{B}^s_{p,\gamma})$ なる Bochner 時空間の最大正則定理の基礎空間として，熱方程式 $\partial_t u - \Delta u = f$ の初期値問題を考察した．初期値 $u(0) = a$ の属する斉次 Besov 空間 $\dot{B}^k_{r,q}$ としては，$k = 2 + n/r - (2/\alpha + n/p - s)$, $n/p \le n/r < \alpha/2 + n/p$ なる関係式が自然であることを証明した．即ち評価式

$$\|\partial_t u\|_{L^{\alpha,q}(0,T;\dot{B}^s_{p,\gamma})} + \|\Delta u\|_{L^{\alpha,q}(0,T;\dot{B}^s_{p,\gamma})} \le C(\|a\|_{\dot{B}^k_{r,q}} + \|f\|_{L^{\alpha,q}(0,T;\dot{B}^s_{p,\gamma})}.$$

が成立することを示した．ここで C は T に依存しない定数である．上記は，これまでの L^p-空間における最大正則性定理を含む最も一般的な評価式である．実際，$p = r$, $\alpha = q$, $s = 0$ とおけば，よく知られている $L^\alpha(0,T;L^p)$ における最大正則性定理を得る．新たな知見として，Lorentz 空間の 2 番目の指数 q は初期値の属する斉次 Besov 空間の 3 番目の指数 q と一致するものであることが明らかになった．応用として Navier-Stokes 方程式の初期問題 $a \in \dot{B}^{-1+\frac{n}{p}}_{p,\infty}$, $n < p < \infty$ に対する強解の一意存在定理を得た．特に $n = 2$ においては，初期渦度が δ-測度である場合，$n = 3$ においては，球面に台をもつ一重層ポテンシャルを初期渦度に与えても，Serrin クラスに属する一意的な強解を構成することに成功した．

境界が時間に依存する外部領域における Stokes 方程式に関する最大正則性定理とその Navier-Stokes 方程式への応用

$\mathbb{R}^3$ におけるコンパクトな曲面 $S(t)$ が時間 $t \in (0,\infty)$ に依存して動く時，$S(t)$ の外部領域を $\Omega(t)$ として，非柱状時空間領域 $Q = \bigcup_{0<t<\infty} \Omega(t) \times \{t\}$ において，Stokes 方程式に対する時間大域的な L^p-最大正則性定理を証明した．ただし，$1 < q < 3/2$ である．有界領域における Saal による全ての $1 < p < \infty$ における結果を用いて，外部領域であっても任意の有限時刻 T までにおける最大正則性定理得ることができる．一方，半無限区間 $[T,\infty)$ においては，$\Omega(t)$ がある固定領域 Ω_* に C^3-級の位相で十分近いとう仮定の下で，Giga-Giaga-Sohr による放物型発展方程式の抽象的 L^p 理論を適用し，最大正則性定理を得た．応用として，$\Omega(t)$ がすべての $t \in [0,\infty)$ に対して初期領域 $\Omega(0)$ に C^3-級の位相で十分近十分近く，かつ $1 < p < 3/2$, $s > 1$ で $2/s + 3/p = 3$ に対して初期値 $a \in B^{2(1-\frac{1}{s})}_{p,s}(\Omega(0))$, 外力 $f \in L^s(0,\infty;L^p(\Omega(t)))$ が十分小さければ，$u \in L^1_{loc}(Q)$, $\partial_t u, \nabla^2 u \in L^s(0,\infty;L^p(\Omega(t)))$ なる Q 上の Navier-Stokes 方程式の解 u が一意的に存在することを証明した．

尺度不変な斉次 Besov 空間における定常 Navier-Stokes 方程式の解の存在と正則性について

$\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$ において，与えられた外力 $f \in \dot{B}^{-3+\frac{n}{p}}_{p,q}$ が十分小さければ，$u \in B^{-1+\frac{n}{p}}_{p,q}$ なる定常 Navier-Stokes 方程式の解 u が一意的に存在することを証明した．ただし，$1 \le p < n$, $1 \le q \le \infty$ である．応用として，定常 Navier-Stokes 方程式に対する自己相似解が得られる．証明方法は，斉次 Besov 空間 $\dot{B}^s_{p,q}$, $s > 0$ における Hölder 型 Leibnitz 規則と，$n/p - s$ を指標とする埋め込

み定理である．尚，Tsurumi により，仮定 $1 \le p < n$ かつ $s > 0$ は最良であることが明らかにされた．

Navier-Stoke 流の影響下における Keller-Segel 方程式系に対する時間大域的解の存在及び有限時間爆発の指標

全平面 $\mathbb{R}^2$ における細胞性粘菌の密度 n が，速度場 u を持つ Navier-Stoke 方程式に従う非圧縮性粘性流体の影響下にある場合を記述する Keller-Segel 方程式系を，尺度不変な関数空間で考察した．まず，初期値 $n_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ が十分小さければ，時間大域的な古典解 $\{n, u\}$ が一意的に存在することを証明した．手法は線形熱半群の $L^p - L^q$ 型評価とその摂動による．更に解が有限時刻で爆発する指標を，u_0 に何ら仮定を課すことなく n_0 の $L^1(\mathbb{R}^2)$ における大きさで表現した．この指標は流体の影響がない場合の $\|n_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ の閾値 8π を含むものである．また爆発時刻 T における $\lim_{t\uparrow T} \|n(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ の挙動を考察した．

学術論文および著書

1. Kozono, H., Shimizu, S., Strong solutions of the Navier-Stokes equations based on the maximal Lorentz regularity theorem in Besov spaces. J. Funct. Anal. **276** (2019), 896–931. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.06.006
2. Farwig, R., Kozono, H., Wegmann,D., Maximal regularity of the Stokes operator in an exterior domain with moving boundary and application to the Navier-Stokes equations. Math. Ann. **375** (2019), 949–972. https://doi.org/10.1007/s00208-018-1773-x
3. Kaneko,K., Kozono, H., Shimizu, S., Stationary solution to the Navier-Stokes equations in the scaling invariant Besov space and its regularity. Indiana Univ. Math. J. **68** (2019), 857–880.http://dx.doi.org/10.1512/iumj.2019.68.7650
4. Kozono, H., Miura, M., Sugiyama, Y., Time global existence and finite time blow-up criterion for solutions to the Keller-Segel system coupled with the Navier-Stokes fluid. J. Differential Equations **267** (2019), 5410–5492. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.05.035

口頭発表・講演

1. International Conference Nonlinear Analysis，Palazzone, Scuola Normale Superiore di Pisa, Cortona, Italy 11–14 June 2019, 2019 年 6 月 12 日

   講演題目：**Asymptotic properties of steady solutions to the 2D Navier-Stokes equations with the finite generalized Dirichlet integral.**

   We consider the stationary Navier-Stokes equations in the whole plane $\mathbb{R}^2$ and in the exterior domain outside of the large circle. The solution v is handled in the class with $\nabla v \in L^q$ for $q \ge 2$. Since we deal with the case $q \ge 2$, our class may be larger than that of the finite Dirichlet integrals, i.e., for $q = 2$ where a number of results such as asymptotic behavior of solutions have been observed. For the stationary problem we shall show that $\omega(x) = o(|x|^{-(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2})})$ as $|x| \to \infty$, where $\omega \equiv \mathrm{rot}\ v$. As an application, we prove the Lioville type theorems under the assumption that $\omega \in L^q(\mathbb{R}^2)$ for $q > 2$.
2. RIMS 共同研究 (公開型)「流体と気体の数学解析」, 京都大学数理解析研究所 2019 年 7 月 3 日–5 日, 2019 年 7 月 4 日

講演題目：**L^r-Helmholtz-Weyl decomposition in 3D exterior domains.**

3 次元 Euclid 空間内の滑らかなコンパクトな曲面を境界に持つ外部領域において，L^r-ベクトル場の de Rham-Hodge-Kodaira 型分解定理を考察する．ベクトル場の境界条件は，境界に接するものと直交するものの 2 種類を対象とする．まず最初に，これらの調和ベクトル場の空間が，共に有限次元であることを示す．有界領域の場合と異なり，次元数は可積分指数 r によって異なることも明らかにする．次に任意の L^r-ベクトル場が，調和部分とベクトルポテンシャル，スカラーポテンシャルのそれぞれの回転と勾配の和で表現できることを証明する．ただし，その分解の一意性，すなわち直和分解の正当性については，調和部分の境界条件と可積分指数 $r = 3$ を閾値として分類がなされる．

3. 神楽坂解析セミナー，東京理科大学数学教室 2019 年 7 月 27 日

   講演題目：**３次元外部領域における L^r-Helmholtz-Weyl 分解.**

   講演内容は 2 と同じ.

4. XI Workshop on Nonlinear Differential Equations, Varese, Italy, July 29th - August 2nd, 2019，2019 年 7 月 30 日

   講演題目：**Asymptotic properties of the 2D Navier-Stokes flows.**

   講演内容は 1 と同じ

5. 東北大学数学教室「幾何セミナー」 2019 年 10 月 15 日

   講演題目：**L^r-Helmholtz-Weyl decomposition of vector fields in 3D exterior domains.**

   3 次元 Euclid 空間内の滑らかなコンパクトな曲面を境界に持つ外部領域上において，L^r-ベクトル場の de Rham-Hodge-Kodaira 型分解定理を考察する．ベクトル場の境界条件は，境界に接するものと直交するものの 2 種類を考察する．まず最初に，これらの境界条件を満たす調和ベクトル場の空間が，共に有限次元であることを示す．この事実は扱う領域が非有界であることから，通常の楕円型偏微分方程式系境界値問題に付随する核空間の有限次元性から従うものではない．ここでは，ベクトル場が L^r という弱い意味で無限遠方で減衰することに注目し，ある種のコンパクト性が回復されることを示すことによって，有限次元性が従うことを紹介する．同時にコンパクト領域の場合と異なり，次元数は可積分指数 r によって異なることも明らかにする．次に，与えられた任意の L^r-ベクトル場が，調和部分とベクトルポテンシャル，スカラーポテンシャルのそれぞれの回転と勾配の和で表現できることを証明する．ただし，その分解の一意性，すなわち直和分解の正当性については，調和部分の境界条件と可積分指数 $r = 3$ (この 3 は空間次元と一致) を閾値として分類がなされる．

6. 第 26 回早稲田大学数学・応用数理談話会　　早稲田大学 2019 年 10 月 24 日

   講演題目：**３次元外部領域における L^r-Helmholtz-Weyl 分解**

   講演内容は 2 と同じ

7. Evolution Equations: Abstract and Applied Perspectives in Honour of the 60th Birthday of Matthias Hieber, Luminy, CIRM, France, October 28th–November 1st, 2019, 2019 年 10 月 28 日

   講演題目：**L^r-Helmholtz-Weyl decomposition in 3D exterior domains.**

   It is known that in 3D exterior domains Ω with the compact smooth boundary $\partial\Omega$, two spaces $X^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ and $V^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$ of L^r-harmonic vector fields $\boldsymbol{h}$ with $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0$ and

$\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0$ are both of finite dimensions, where $\boldsymbol{\nu}$ denotes the unit outward normal to $\partial\Omega$. We prove that for every L^r-vector field $\boldsymbol{u}$, there exist $\boldsymbol{h} \in X^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$, $\boldsymbol{w} \in \dot{H}^{1,r}(\Omega)^3$ with div $\boldsymbol{w} = 0$ and $p \in \dot{H}^{1,r}(\Omega)$ such that $\boldsymbol{u}$ is uniquely decomposed as

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{h} + \mathrm{rot}\ \boldsymbol{w} + \nabla p.$$

On the other hand, if for the given L^r-vector field $\boldsymbol{u}$ we choose its harmonic part $\boldsymbol{h}$ from $V^r_{\mathrm{har}}(\Omega)$, then we have a similar decomposition to above, while the unique expression of $\boldsymbol{u}$ holds only for $1 < r < 3$. Furthermore, the choice of p in $\dot{H}^{1,r}(\Omega)$ is determined in accordance with the threshold $r = 3/2$.

8. 日本数学会・函数方程式論分科会　研究集会「微分方程式の総合的研究」2019 年 12 月 21 日–22 日, 東京工業大学大岡山キャンパス 2019 年 12 月 21 日および 22 日

   講演題目：**３次元外部領域における L^r-Helmholtz-Weyl 分解（サーベイ講演 I&II）**

   3 次元 Euclid 空間におけるコンパクトな滑らかな境界をもつ外部領域における r 乗可積分であるベクトル場の Helmholtz-Weyl 型直和分解について考察する．境界のあるコンパクト Riemann 多様体上の滑らかな p 次微分形式の de Rham-Hodge-Kodaira 分解については，よく知られている．しかし，ベクトル場を滑らかなではない L^r-空間まで拡張すると，対応する直和分解定理が得られたのは比較的最近である．ベクトル場は 1 次微分形式と同一視できるが，3 次元 Riemann 多様体に関しては，Hodge の $*$-作用素によって 2 次微分形式もベクトル場と対応がつくので，3 次元空間ではベクトル場の構造が p 次微分形式を支配すると言える．そこで，ここでは最も基本的な $\mathbb{R}^3$ における外部領域上の L^r-ベクトル場の Helmholtz-Weyl 型直和分解を考える．

9. 名古屋大学多元数理科学研究科談話会　　名古屋大学 2020 年 1 月 15 日．

   講演題目：**３次元外部領域における L^r-調和ベクトル場と Helmholtz-Weyl 分解**

   3 次元 Euclid 空間内の滑らかでコンパクトな曲面を境界に持つ外部領域において，L^r-ベクトル場の de Rham-Hodge-Kodaira 型分解定理を考察する．ベクトル場の境界条件は，境界に接するものと直交するものの 2 種類を対象とする．まず最初に，これらの調和ベクトル場の空間が，共に有限次元であることを示す．有界領域の場合と異なり，次元数は可積分指数 r によって異なることも明らかにする．その際，外部領域に固有の位相不変量である Betti 数を定義し，次元数との関連についても言及する．次に任意の L^r-ベクトル場が，調和部分とベクトルポテンシャル，スカラーポテンシャルのそれぞれの回転と勾配の和で表現できることを証明する．ただし，その分解の一意性，すなわち直和分解の正当性については，調和部分の境界条件と可積分指数 r=3 を閾値として分類がなされる

10. 東北大学数理科学連携研究センターと東京理科大学総合研究院の連携研究協定キックオフミーティング 東京理科大学神楽坂キャンパス 2020 年 3 月 4 日

    講演題目：**L^r-Helmholtz-Weyl decomposition in 2D and 3D exterior domains**

    2 次元と 3 次元 Euclid 空間内のコンパクトな滑らかな曲線，または曲面 $\partial\Omega$ を境界にもつ外部領域 Ω における L^r-ベクトル場の Helmholtz-Weyl 分解について，次元による差異を明らかにした．2 次元においては，調和ベクトル場の 2 つの異なる境界条件は，互いに 90 度回転の行列によって一対一に対応がつくので，Poission 方程式の Dirichlet 問題によって L^r-空間での一意分解定理が成立する閾値は $r = 2$ である．一方，3 次元においては，状況は異なり，特に $u \times \nu|_{\partial\Omega} = 0$ なる境界条件を調和部分にもつ L^r-直和分解は $r = 3/2$ と $r = 3$ の 2 つの可積分指数を境に顕著な差異が生じる．

海外渡航

(i) イタリア　International Conference Nonlinear Analysis，Palazzone, Scuola Normale Superiore di Pisa, Cortona, Italy, 2019 年 6 月 11 日〜14 日

(ii) イタリア　XI Workshop on Nonlinear Differential Equations, Varese, Italy, 2019 年 7 月 29 日〜8 月 2 日

(iii) フランス　Evolution Equations: Abstract and Applied Perspectives in Honour of the 60th Birthday of Matthias Hieber, Luminy, CIRM, France, October 28th–November 1st, 2019, 2019 年 10 月 28 日〜11 月 2 日

外部資金獲得状況

研究課題番号　16H06339
研究課題名「非線形解析学と計算流体力学の協働による乱流の数学的理論の新展開 」
研究期間と研究経費 平成 28 年度–令和 3 年度 125,100 千円 (2019 年度は 25,410 千円)

担当した授業科目

関数解析学特選（7 セメ），解析学特論 C（修士），解析学特殊講義 EIII(博士)

学会その他学内・外における活動

Journal of Mathematical Fluid Mecahnics, Editorial Board
Funkcialaj Ekvacioj, Editorial Board
Journal of Evolution Equation, Editorial Board
一般社団法人日本数学会・理事長 (2019 年 5 月 31 日まで)，同理事長代行（2019 年 6 月 1 日から）
日本学術会議・連携会員
令和 2 年度文部科学大臣表彰科学技術賞審査部会委員
公益財団法人井上科学振興財団・表彰選考委員
京都大学数理解析研究所専門委員会委員