小薗英雄

研究の概要

Lorentz 空間に外力をもつ Navier-Stoes 方程式とその自己相似解への応用

n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ において Navier-Stokes 方程式の Cauchy 問題を取り扱った．与えられた初期データと外力が共にスケール不変な Lorentz 空間で十分小さければ，時間大域的な軟解 (mild solution) が一意的に存在することを証明した．更に初期データが微分可能性を有した Besov 型のスケール不変な空間に属していれば，我々の構成した軟解は強解 (strong solution) となることを示した．手法は，方程式に付随する非線形項の Lorentz 空間における双線形評価式と線形 Stokes 方程式の最大正則性による．応用として，与えられたデータが斉次関数であれば，Navier-Stokes 方程式の自己相似解が存在することを明らかにした．特に時間大域的軟解の構成は陰関数定理によるので，副産物として，与えられたデータに関する解の連続依存性が従う．

Navier-Stokes 方程式の一般化された適切な弱解のエネルギー有限性と 2 次元非有界領域における Liouville 型定理

Caffarelli-Kohn-Nirenberg によって提唱された Navier-Stoes 方程式の適切な弱解 (suitable weak solution) を，運動エネルギーおよびその散逸が必ずしも有界でないより一般的な超関数のクラスで考察した．実際，その様な超関数解で，局所的なエネルギー不等式を満たすものを一般化された適切な弱解（generalized suitable weak solution）と名付け，付随する圧力関数とともに，無限遠方で弱い増大度を仮定するならば．初期データのエネルギー有限性が，時間発展後も運動エネルギーとその散逸が有限に留まることを保証し，かつエネルギー等式が成り立たしめ得ることを証明した．この結果は全空間 $\mathbb{R}^n(n \geq 2)$ によるのもであるが，特に 2 次元平面においては，一般の非有界領域においても，渦度の遠方での減衰度と，領域の境界におけるある種の積分量の符号を仮定するならば，時間発展後も解の渦とその一階偏導関数は領域全体で自乗可積分であることを示した．両者の結果の応用として，Navier-Stoes 方程式の解に対して新たな Liouville 型定理を確立した．

特異なデータを有する Navier-Stokes 方程式の強解の構成

与えられた初期データと外力とがデルタ関数など様に特異点を有する場合であっても，Serrin クラスの強解が存在することを証明した．手法は Besov 空間における Stokes 方程式の最大正則性定理と，そのノルムに付随する関数空間における双線形評価式による．応用として，2 次元平面で初期渦度や外力がデルタ関数であっても，正則な解が存在することを示した．また 3 次元空間においては，初期速度や外力が一重層ポテンシャルと同様な特異点を有しても，それらのノルムが十分小さければ，時間大域的な正則解が存在することを明らかにした．

Navier-Stokes 方程式の時間の重み付き Besov 空間における研究

n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ において斉次 Besov 空間を導入し，それに時間変数の重みを乗じるスケール不変な時空間の関数空間で，外力付きの Navier-Stokes 方程式の軟解の一意存在を議論した．実際，与えられたデータがそれらの関数空間で十分小さければ，時間大域的な軟解が一意的に存在することを証明した．手法は適切な解空間を設定し，解を与えられたデーターの陰関数と捉えることに特徴がある．陰関数定理の帰結として，データに対する解写像の連続依存性が得られる．その応用として，スケール不変な時空間の関数空間における解の時間漸近的な安定性も証明できる．更に，与えられたデータが大きい場合は，臨界 Besov 空間における高周波部分が

小さいという付加条件の下で時間局所解を構成した．尚，我々の付加条件は，従来の $L^p(\mathbb{R}^n)$(ただし，$n \leqq p < \infty$) に属する大きな初期データの時間局所解の存在定理を含むより一般的なものである．

一般の非有界領域における Navier-Stokes 方程式の研究の総括

Navier-Stokes 方程式の研究に関しては，線形化方程式である Stokes 方程式の L^r-理論が重要な役割を演じる．実際，与えられた領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して，$L^r(\Omega)$ に属するベクトル場の Helmholtz 分解が基礎となり，Stokes 作用素が定義される．その Stokes 作用素が，ソレノイダルベクトル場 $L^r_\sigma(\Omega)$ で解析的半群を生成し，更に最大正則性を有することによって，これまで非線形方程式である Navier-Stokes 方程式の大域的および局所適切性の研究が進展してきた．しかし，境界が非コンパクトであるような非有界領域 Ω においては，L^r-Helmholtz 分解は成り立たず，Navier-Stokes 方程式の解析は困難を極めていた．そこで，無限遠方を同分解定理が常に成立する L^2-空間と同様に扱うことを可能にする関数空間 $\tilde{L}^r(\Omega) = L^r(\Omega) + L^2(\Omega)$（$1 < r \leq 2$ のとき），$\tilde{L}^r(\Omega) = L^r(\Omega) \cap L^2(\Omega)$（$2 \leq r < \infty$ のとき）を導入し，$\tilde{L}^r$-Helmholtz 分解を構成した．更にそれに付随するソレノイダルベクトル場 $\tilde{L}^r_\sigma(\Omega)$ 上の Stokes 半群の解析性及び最大正則性定理を確立した．応用として，一様に C^2-級である一般の非有界領域 Ω において，任意の $L^2_\sigma(\Omega)$ の初期データに対する局所エネルギー不等式および強エネルギー不等式を満たす Navier-Stokes 方程式の時間大域的弱解の存在と，それに対する Leray の構造定理を証明した．これらの結果はすでに小薗及びその共同研究者で得られていたものであるが，本年度はそれらを総合的にまとめて体系化した．

学術論文および著書

1. Kozono, H., Shimizu, S., Navier-Stokes equations with external forces in Lorentz spaces and its application to the self-similar solutions, J. Math. Anal. Appl. **458** (2018), 1693–1708. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.10.048
2. Kozono, H., Terasawa, Y., Wakasugi, Y., Finite energy of generalized suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations and Liouville-type theorems in two dimensional domains, J.Differential Equations **265** (2018), 1227–1247. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.03.027
3. Kozono, H., Shimizu, S., Strong solutions of the Navier-Stokes equations with singular data. Mathematical analysis in fluid mechanics-selected recent results, 163–173, Contemp. Math., **710**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018. ISBN 978-1-4704-3646-9
4. Kozono, H., Shimizu, S., Navier-Stokes equations with external forces in time-weighted Besov spaces, Math. Nach. **291**(2018), 1781–1800. https://doi.org/10.1002/mana.201700078
5. Farwig, R., Kozono, H., Sohr, H., Stokes semigroups, strong, weak, and very weak solutions for general domains, Handbook of mathematical analysis in mechanics of viscous fluids, 419–459, Springer, Cham, 2018. DOI 10.1007/978-3-319-10151-4-8-1

口頭発表・講演

1. 東北大学応用数学セミナー，2018 年 4 月 26 日
   講演題目:**Characterization of harmonic L^r-vector fields in 3D exterior domains.**
   3 次元空間内の外部領域 Ω 上の L^r-ベクトル場 h を 2 つの異なる境界条件 $h \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$，及び $h \times \nu|_{\partial\Omega} = 0$ で考察する．ただし，ν は Ω の境界 $\partial\Omega$ 上の単位法線ベクトルである．Ω

が内部領域であれば，これらの境界条件を満たす調和ベクトル場の空間は有限次元であり，かつそれぞれの次元数は，領域の位相的不変量である第一および第二 Betti 数に等しいことが知られている．内部領域における有限次元性の本質は，$\partial\Omega$ で同様な境界条件を満たす一般のベクトル場 u に対しては，一階偏導関数 ∇u の L^r ノルムが，発散 $\mathrm{div}\, u$，回転 $\mathrm{rot}\, u$ および u 自身のそれで評価されることと，Rellich の定理によるコンパクトな埋め込み $H^{1,r}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ にある．またその次元の位相幾何学的な特徴づけは，Ω における調和関数の Dirichlet 及び Neumann 境界値問題の可解性から従う．本講演においては，外部領域においては，L^r-調和ベクトル場 h の無限遠方における挙動は，h の局所的な L^r-ノルムによって制御可能であることを明らかにし，内部領域と同様に $H^{1,r}(\Omega)$ のコンパクトな埋め込みが回復できることによって有限次元性を示す．更に，内部領域の Betti 数を一般化した外部領域特有の位相幾何学的不変量を定義し，L^r-調和ベクトル場の空間に対して次元数の特徴付けを行う．特に境界条件 $h \times \nu|_{\partial\Omega} = 0$ なる調和ベクトル場の空間の次元数は，$r = 3/2$ を閾値として，劇的に変化することを紹介する．

2. PDE Workshop New York University of Shanghai, Shanghai, China 18–19 July 2018, 2018 年 7 月 18 日

   講演題目:**Characterization of harmonic L^r-vector fields in 3D exterior domains.**

   講演内容は 1 と同じ.

3. 京都大学 NLPDE セミナー，京都大学数学教室 2018 年 10 月 19 日

   講演題目：**Harmonic vector fields in L^r on 3D exterior domains.**

   講演内容は 1 と同じ.

4. International Conference on PDEs from Fluids, Wuhan University, Wuhan, China 25–28 October 2018, 2018 年 10 月 27 日

   講演題目：**Harmonic vector fieelds in L^r on 3D exterior domains.**

   講演内容は 1 と同じ

5. RIMS 共同研究（公開型）「関数空間の一般化とその周辺」 2018 年 11 月 26 日～28 日

   (i) 11 月 26 日講演題目：**Besov 空間の基礎と積公式について**

   Littlewood-Paley 分解を導入した後に Besov 空間の定義をする．種々の埋め込み定理，実補間の手法による Sobolev 空間と Besov 空間の関係を解説した後，Paraproduct fomula に基づき，関数積に対する Holder-Leibnitz 型評価式を証明する．

   (ii) 11 月 27 日講演題目：**Navier-Stokes 方程式の定常問題への応用**

   $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ における定常 Navier-Stokes 方程式の可解性をスケール不変な斉次 Besov 空間 $\dot{B}^{-1+\frac{n}{p}}_{p,q}$, $1 \leq p < n$, $1 \leq q \leq \infty$ において構成する．手法は関数積に対する Holder-Leibnitz 型評価式に基づく双線形評価式による．尚，この存在定理は，与えられた外力に対する解の連続依存性が $n \leq p \leq \infty$ のとき破綻するという鶴見氏による結果から，方程式の適切性に関して最良であることを示している．

   (iii) 11 月 28 日講演題目：**Besov 空間における熱半群の $L^p - L^q$ 型評価について**

   斉次 Besov 空間において熱半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t\geq 0}$ の $L^p - L^q$-型評価式を紹介した．応用として，Navier-Stokes 方程式の正則性を保証するスケール不変な関数空間として有名な Serrin クラス $L^{s,q}(0,\infty; L^r(\mathbb{R}^n))$, $2/s + n/r = 1$, $n < r \leq \infty$, $1 < q \leq \infty$ に Stokes 方程式の解 $e^{t\Delta}a$ が属するための必要十分条件は，$a \in \dot{B}^{-1+\frac{n}{r}}_{r,q}$ であることを証明した．

6. 大阪大学微分方程式セミナー　2018 年 12 月 7 日
   講演題目：L^r **harmonic vector fields in 3D exterior domains.**
   講演内容は 1 と同じ
7. Darmstadt 工科大学　Oberseminar Analysis 2019 年 1 月 31 日
   講演題目：L^r **harmonic vector fields in 2D exterior domains.**
   2 次元平面における滑らかな境界 $\partial\Omega$ を有する外部領域 Ω 上の調和ベクトル場を L^r-空間において考察した．3 次元ベクトル場に対応して $h \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$, $h \wedge \nu|_{\partial\Omega} = 0$ なる 2 つの境界条件があるが，$\pi/2$ 回転の一次変換によってこれらの境界条件をもつ調和ベクトル場は同型となる．従って，本質的に調和ベクトル場はどちらか一方の境界条件のみを調べればよい．本講演においては 3 次元外部領域の場合と同様に 2 次元外部領域においても，すべての $1 < r < \infty$ に対して L^r-調和ベクトル場は有限次元であることを証明した．更に領域内の境界が互い交わらない L 個の単純閉曲線からなる場合には，$r = 2$ を閾値として,L^r-調和ベクトル場の次元数は L(ただし $2 < r < \infty$ のとき) または $L - 1$(ただし $1 < r \le 2$ のとき) であることを示した．3 次元の場合と比較して，ベクトル場の代数的な構造は 2 次元境域においては単純ではあるが，一方で Laplace 作用素の基本解が対数関数であることに起因して，その無限遠方での解析は困難となる．実際，次元の決定にはポテンシャル論的手法により，L^r-調和ベクトル場の基底を構成することが証明の鍵となる．

海外渡航

(i) ドイツ　Bad Ball　Workshop on Mathematical Fluid Dynamics 2018 年 5 月 7 日〜11 日
(ii) 中国　New York University of Shanghai　2018 年 7 月 17 日〜20 日
(iii) ブラジル　San Paolo International Mathematical Union 2018 年 7 月 28 日〜31 日
Rio de Janeiro International Congress of Mathematics 2018 2018 年 8 月 1 日〜9 日
(iv) 韓国　ソウル　Coex Joint annual meeting of Korean Mathematical Society and German Mathematical Union　2018 年 10 月 3 日〜8 日
(v) 中国　武漢大学　2018 年 10 月 24 日〜28 日

非常勤講師, 集中講義

武漢大学 集中講義 2018 年 10 月 25 日

講義科目: Method of the Besov space and its applications to the Navier-Stokes equations

Abstract: Since the pioneer work of Kato's L^p-strong solution, a number of efforts have been made to enlarge the space of the initial data which enables us to obtain the local existence of strong solutions to the Navier-Stokes equations. For instance, $L^n(\mathbb{R}^n)$, $L^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $M^n(\mathbb{R}^n)$, $\dot{B}^{-1+n/p}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ and $\dot{F}^{-1}_{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$ are monotonically increasing function spaces of initial data in which the local well-posedness of the Navier-Stokes equations has been clarified. In this series of lectures, we bring a focus onto the Besov spaces and discuss local and global well-posedness in the scaling invariant cases. In particular, we deal with the suitable class of external forces. Our final goal is to find the largest homogeneous Besov space where the well-posedness is established for both initial data and external forces. To this end, we make fully use of the maximal Lorentz regularity theorem in Besov spaces. This is based on the joint work with Prof. Senjo Shmizu at Kyoto University.

Contents of the course

(i) Short introduction to the Besov space
(ii) $L^p - L^q$-estimates for the semigroup and bilinear estimates in Besov spaces
(iii) Maximal Lorentz regularity theorem of the Stokes equations in Besov spaces
(iv) Well-poseness of the Navier-Stokes equations in Besov spaces

外部資金獲得状況

(i) 科学研究費補助金　基盤研究（S）
研究課題番号　16H06339
研究課題名「非線形解析学と計算流体力学の協働による乱流の数学的理論の新展開 」
研究期間と研究経費 平成 28 年度- 32 年度 123,600 千円 (2018 年度は 22,200 千円)
(ii) 平成 30 年度 (2018 年度) 日本学術振興会ドイツとのセミナー (DFG)
セミナー名「最大正則性と非線形偏微分方程式」
研究期間と研究経費 2019 年 3 月 26 日〜30 日 2,500 千円

学会その他学内・外における活動

Journal of Mathematical Fluid Mecahnics, Editorial Board
Funkcialaj Ekvacioj, Editorial Board
一般社団法人日本数学会・理事長
日本学術会議・連携会員

独立行政法人日本学術振興会 二国間セミナー
「Maximal regularity and nonlinear PDE 」
日時：2019 年 3 月 26 日〜30 日　場所：京都大学数理解析研究所
日本側代表者
日本数学会主催　「藤岡おもしろ数学教室」
講演題目: 数学のミレニアム問題と科学とのつながり
日時：2018 年 10 月 1 日　場所：群馬県藤岡市立　西中学校