

研究の概要

3次元空間における定常 Navier-Stokes 方程式における Liouville 型定理

3次元空間において Dirichlet 積分有限の範囲で、定常 Navier-Stokes 方程式の解のアプリオリ評価を、同積分と同じスケールを有する渦度ベクトルの無限遠方の挙動によって確立した。その応用として、渦度が無限遠方で距離の $5/3$ 乗よりも早い減衰を示すならば、自明解に限るという Liouville 型定理を証明した。

外部領域における準線形双曲型モデル流体方程式の球対称解の漸近挙動

高次元空間の外部領域における圧縮性粘性流体の運動を記述する双曲型モデルの方程式に対して、その球対称解の時間大域的古典解の存在と漸近挙動を示した。手法としては、重み付き L^2 -エネルギー法を用いることにより、伝播速度が線形波動のそれに比べて小さいという制限 (Sub-characteristic condition) を除去することに成功した。

非斉次 Dirichlet 境界条件下における Navier-Stokes 方程式の時間大域的な強解の存在とその漸近的減衰

内部および外部領域の双方における非定常 Navier-Stokes 方程式の境界条件が時間に依存して減衰する場合、強解の時間大域的乱流解の存在と、その漸近挙動を時間変数の指数の観点から求めた。内部領域については指数減衰、外部領域においては代数的オーダーによる減衰であるが、特に境界条件が斉次である場合は、従来の結果を含むものである。手法としては、線形 Stokes 方程式の L^p -最大正則性定理が重要な役割を演じる。

Stokes 方程式の固有値の Hadamard 変分公式とその応用

3次元における滑らかな閉曲面で囲まれた領域をその体積が一定に保たれる様な摂動を施した場合の Stokes 方程式の固有値の Hadamard 変分公式を導出した。その応用として、体積を保存する様な領域のすべての摂動に対して固有値の Hadamard 変分がゼロであるならば、もとの領域は 2次元トーラスに他ならないことを証明した。

学術論文および著書

1. Kozono, H., Terasawa, Y., Wakasugi Y., A Remark on Liouville-type theorems for the stationary Navier-Stokes equations in three space dimensions, *J. Funct. Anal.* **272** (2017), 804–818.
2. Hashimoto, I., Kozono, H., Asymptotic behavior of radially symmetric solutions for quasi-linear hyperbolic fluid model in higher dimensions, *J. Differential Equations.* **262** (2017), 5133–5159.
3. Farwig. R., Kozono, H., Wegmann, D., Existence of strong solutions and decay of turbulent solutions of Navier-Stokes equations with nonzero Dirichlet boundary data, *J. Math. Anal. Appl.* **453** (2017), 271–286.
4. Farwig. R., Kozono, H., Wegmann, D., Decay of non-stationary Navier-Stokes equations with nonzero Dirichlet boundary data, *Indiana Univ. Math. J.* **66** (2017), 2169–2185.

5. Jimbo, S., Kozono, H., Terammoto, Y., Ushikoshi, E., Hadamard variational formula for eigenvalues of the Stokes equations and its application, *Math. Ann.***368** (2017), 877–884.

口頭発表・講演

1. Conference on Vorticity, Rotation and Symmetry (IV) Complex Fluids and the Issue of Regularity, CIRM (Luminy), France, May 8–12, 2017, 2017年5月8日
講演題目：**Finite energy for the Navier-Stokes equations and Liouville-type theorems.**
Caffaleni-Kohn-Nirenberg によって導入された適切な弱解 (suitable weak solution) をより一般化した弱解を導入し、その弱解がエネルギー不等式を満たすための十分条件を与えた。通常の Leray-Hopf クラスの弱解が、エネルギー等式を満たす十分条件としては、Serrin のクラスがよく知られているが、ここで与えたクラスは Serrin のものよりも広い関数空間であり、また運動エネルギーおよびエネルギー散逸と同じスケールを有する。応用として、初期の静止状態におけるより一般化された適切な弱解の Liouville 型定理を証明した。
2. 北海道大学数学教室談話会 北海道大学 2017年6月2日
講演題目：**Strong solutions of the Navier-Stokes equations based on the maximal Lorentz regularity theorem in Besov spaces.**
Besov 空間における Navier-Stokes 方程式の適切性を最大正則性定理を用いて証明した。応用として、2次元平面において初期渦度が Delta 関数であるとき、あるいは3次元全空間において初期渦度が球面上にのみ台を有する様な特異な状況においても、我々の設定したスケール不変な Besov 空間においても可解であることは証明された。
3. 非線形科学コロキウム早稲田大学理工学術院 2017年6月29日
講演題目：**Liouville type theorem for the Navier-Stokes equations.**
3次元全空間において定常斉次ナビエ・ストークス方程式の解のディリクレ積分の有限性を渦度の無限遠方の条件のみで確立した。応用として、渦度が無限遠方で3/5乗より早い減衰度を有すれば、同方程式の解は自明解に限ることを証明した。
4. 第6回岐阜数理科学研究会 岐阜大学サテライトキャンパス 2017年8月10日~11日, 2017年8月10日
講演題目：**Stationary solution to the Navier-Stokes equations in the scaling invariant Besov space and its regularity.**
 n -次元空間 \mathbb{R}^n における定常 Navier-Stokes 方程式の強解の存在、一意性、正則性をスケール不変な斉次 Besov 空間で考察した。構成した強解は Landau の解を含む。証明の鍵は斉次 Besov 空間の種々の埋め込み定理と双線形評価である。
5. 東京工業大学 大岡山解析セミナー 2017年10月20日
講演題目：**Stationary solution to the Navier-Stokes equations in the scaling invariant Besov space and its regularity.**
講演内容は4と同様。
6. 大阪市立大学 数学教室談話会 2017年10月25日
講演題目：**Method of Besov spaces and the Navier-Stokes equations**
斉次 Besov 空間における paraproduct 公式や Leibnitz 則の基礎を紹介した後、熱半群の $L^p - L^q$ -評価式について解説を行った。その応用として、尺度不変な斉次 Besov 空間における Navier-Stokes 方程式の解の存在、一意性、正則性について証明した。

7. 金沢大学 解析セミナー 2017年11月24日
 講演題目：**Harmonic vector fields in L^r on 3D exterior domains.**
 3次元空間の外部領域の r -乗可積分空間における調和ベクトル場について考察した。境界条件は、ベクトル場が境界の法線ベクトルと直交、または平行というものである。領域のコンパクト性の欠如にもかかわらず、これらの境界条件下における L^r -調和ベクトル場は有界領域の場合と同様に有限次元空間であることが明らかにされた。更に、有界領域における位相幾何学的不変量である第1および第2 Betti数に相当する指標を外部領域においても導入し、これらの不変量によって L^r -調和ベクトル場の次元が決定されることを示した。特に、境界において法線ベクトルと平行という条件下の L^r -調和ベクトル場の次元は、 $r = 3/2$ を閾値として異なることを証明した。
8. International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling and Numerics
 November 28 - December 01, 2017 早稲田大学 2017年11月28日
 講演題目：**Finite energy for the Navier-Stokes equations and Liouville-type theorems**
 講演内容は1と同様。
9. The 26th Annual Meeting on Differential Equations and Related Topics Taiwan National University, 6-7 January 2018, 2018年1月7日
 講演題目：**Strong solutions of the Navier-Stokes equations based on the maximal Lorentz regularity theorem in Besov spaces.**
 講演内容は2と同様
10. 九州関数方程式セミナー 九州大学・福岡大学 2018年1月1月26日
 講演題目： **L^r -harmonic vector fields in 3D exterior domains**
 講演内容は7と同様。
11. 第19回北東数学解析研究会 2018年2月19日～20日 北海道大学 2018年2月20日
 講演題目：**Finite energy for the Navier-Stokes equations and Liouville-type theorems**
 講演内容は1と同様
12. Workshop on Compressible Navier-Stokes Systems and Related Problems (I) 5-10 March 2018, 香港中文大学 2018年3月9日
 講演題目：**Harmonic vector fields in L^r on 3D exterior domains.**
 講演内容は7と同様。

海外渡航

- (i) フランス Centre International de Rencontres Mathématiques 2017年5月8日～12日
- (ii) イタリア Centro Internazionale Mathematico Estivo 2017年9月4日～8日
- (iii) 中国 復旦大学 2017年9月18日～22日
- (iv) 台湾 国立台湾大学 2018年1月7日～8日
- (v) ドイツ Darmstadt 工科大学 2018年2月21日～27日, 3月23日～4月3日
- (vi) 香港 香港中文大学 2018年3月7日～10日

非常勤講師, 集中講義

- (i) Centro Internazionale Matematico Estivo 集中講義 2017年9月4日~9月8日
講義科目: **Mathematical Analysis of the Navier-Stokes Equations: Foundations and Overview of Basic Open Problems**
Title : **Method of the Besov space and its applications to the strong solutions of the Navier-Stokes equations**

Abstract: Since the pioneer work of Kato's L^p -strong solution, a number of efforts have been made to enlarge the space of the initial data which enables us to obtain the local existence of strong solutions to the Navier-Stokes equations. For instance, $L^n(\mathbb{R}^n)$, $L^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $M^n(\mathbb{R}^n)$, $\dot{B}_{p,\infty}^{-1+n/p}(\mathbb{R}^n)$ and $\dot{F}_{\infty,2}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ are monotonically increasing function spaces of initial data in which the local well-posedness of the Navier-Stokes equations has been clarified. In this series of lectures, we bring a focus onto the Besov spaces and discuss local and global well-posedness in the scaling invariant cases. In particular, we deal with the suitable class of external forces. Our final goal is to find the largest homogeneous Besov space where the well-posedness is established for both initial data and external forces. To this end, we make fully use of the maximal Lorentz regularity theorem in Besov spaces.

Contents of the course

- (i) Strong L^p -solutions
(ii) Short introduction to the Besov space
(iii) $L^p - L^q$ -estimates for the semigroup and bilinear estimates in Besov spaces
(iv) Maximal Lorentz regularity theorem of the Stokes equations in Besov spaces
(v) Well-posedness of the Navier-Stokes equations in Besov spaces
- (ii) 復旦大学 集中講義 2017年9月18日~9月22日
講義科目: **Incompressible Navier-Stokes Equations**
Title: **Method of the Besov space and its applications to the strong solutions of the Navier-Stokes equations**

Abstract: We first introduce several basic notions of the Besov spaces such as paraproduct formula and the chain rule. The bilinear estimates related to the nonlinear structure on the Navier-Stokes equations and the $L^p - L^q$ -type estimates of the Stokes semigroup are established. Then the problem on existence, uniqueness and regularity of the stationary Navier-Stokes equations is discussed in the scaling invariant homogeneous Besov space. In particular, a self-similar solution is constructed. As for the non-stationary case, we prove a maximal regularity theorem of the Stokes equations in the homogeneous Besov space. Finally, local and global well-posedness in the critical Besov space is fully investigated for the Cauchy problem with the external forces of the non-stationary Navier-Stokes equations. This series of lectures is based on the joint work with Prof. Senjo Shimizu at Kyoto University.

学会その他学内・外における活動

Journal of Mathematical Fluid Mechanics, Editorial Board, Funkcialaj Ekvacioj, Editorial

Board, 一般社団法人日本数学会・理事長, 日本学術会議・連携会員, 日本学術振興会日独共同大学院プログラム・日本側コーディネーター

独立行政法人日本学術振興会 日独共同大学院プログラム JSPS-DFG Japanese-German Graduate Externship 第15回流体数学国際研究集会 The 15th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics

日時：2018年1月9日～12日 場所：早稲田大学
組織委員